PODSTAWY TEORII UKŁADÓW CYFROWYCH

Systemy liczbowe

Opracował: Andrzej Nowak

Bibliografia: **Urządzenia techniki komputerowej,** K. Wojtuszkiewicz
http://pl.wikipedia.org/

System liczbowy – zbiór reguł jednolitego zapisu i nazewnictwa liczb.

Do zapisywania liczb używa się skończonego zbioru znaków, zwanych cyframi, które można łączyć w dowolnie długie ciągi, otrzymując nieskończoną liczbę kombinacji.

Rozróżnia się systemy liczbowe **pozycyjne** i **niepozycyjne** (**addytywne**).

W systemach liczbowych pozycyjnych liczbę przedstawia się jako ciąg cyfr. Wartość jej jest zależna od położenia (pozycji) cyfry w liczbie.

a. Do systemów **pozycyjnych** zaliczamy m.in.:

   dziesiątkowy, **dwójkowy**, **ósemkowy**, **szesnastkowy**.

b. Do **addytywnych** systemów liczbowych zaliczamy m.in.:
   rzymski, **hieroglificzny**, **alfabetyczny**, gdzie wartość liczby jest sumą wartości jej znaków cyfrowych.

Liczba – pojęcie abstrakcyjne, jedno z najczęściej używanych w matematyce.

Określenie „liczba” bez żadnego przymiotnika jest nieścisłe, gdyż matematycy nie definiują „liczb”, lecz „liczby naturalne”, „liczby całkowite”, itp. Poszczególne rodzaje liczb są definiowane za pomocą aksjomatów lub konstruowane z bardziej podstawowych pojęć, takich jak zbiór, czy typy liczb prostsze od konstruowanego.

Pierwotnie liczby służyły do porównywania wielkości zbiorów przedmiotów (liczby naturalne), później także wielkości ciągłych (miary i wagi), obecnie w matematyce są rozważane jako twory abstrakcyjne, w oderwaniu od ewentualnych fizycznych zastosowań.

System pozycyjny – wzór ogólny

Ogólnie oznaczając przez

   c_n - **cyfrę systemu pozycyjnego** i n – **pozycję cyfry**

zaś przez:

   p - **podstawę systemu,**

wartość reprezentowaną przez symbol liczby zapisujemy jako sumę iloczynów postaci:

$$c_n * p^n + \ .\ .\ .\ + c_2 * p^2 + c_1 * p^1 + c_0 * p^0$$

System dziesiątkowy (decymalny)

<u>**System dziesiątkowy**</u>: **0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9** - to wszystkim znane symbole cyfr arabskiego dziesiątkowego, pozycyjnego systemu liczenia. Każdemu z tych symboli przyporządkowana jest pewna wartość. Z tych prostych symboli tworzymy symbole bardziej złożone wpisując cyfry na tzw. pozycje, w uszeregowaniu od prawej do lewej. I tak najbardziej skrajna prawa pozycja, to pozycja zerowa (pozycja jedności), dalej pozycja pierwsza (pozycja dziesiątek), dalej pozycja druga (pozycja setek), ... itd.

Zgodnie z przedstawioną zasadą, każdemu prostemu czy złożonemu symbolowi układu można przyporządkować wartość, zwaną liczbą. Liczba to nie to samo co cyfra. Cyfry to znaki graficzne służące do opisu liczb.

Symbol	Wartość w systemie	Liczba
7	$7 * 10^0$	siedem
56	$5 * 10^1 + 6 * 10^0$	pięćdziesiąt sześć
342	$3 * 10^2 + 4 * 10^1 + 2 * 10^0$	trzysta czterdzieści dwa

<u>**Konwersja na dziesiątkowy:**</u>

$$(4013)_5 = 4 * 5^3 + 0 * 5^2 + 1 * 5^1 + 3 * 5^0 = 500 + 5 + 3 = (508)_{10}$$

<u>**Konwersja z dziesiątkowego**</u>

$$(508)_{10} = (4013)_5$$

508 : 5 = 101 reszta 3
101 : 5 = 20 reszta 1
20 : 5 = 4 reszta 0
4 : 5 = 0 reszta 4

System dwójkowy (binarny)

<u>**System dwójkowy**</u> - zrewolucjonizował cały świat techniki, dając podstawę rozwoju wiodącej obecnie dziedzinie wiedzy jaką jest informatyka.

Cyframi tego systemu są: 0 i 1.

Symbolizują one dwa stany tzw.

0 - stan niski – (brak działania/brak sygnału)

1- stan wysoki – (działanie układu/sygnał)

Podstawą systemu jest 2. Stąd też i nazwa układ dwójkowy.

Konwersja liczb

Ponieważ jest to również system pozycyjny, to możemy w znany już sposób dokonywać konwersji liczby z systemu dziesiątkowego na dwójkowy, np.

$(87)_{10}$ =	**87 : 2 = 43**	**1**	**= $(1010111)_2$**
	43 : 2 = 21	**1**	
	21 : 2 = 10	**1**	
	10 : 2 = 5	**0**	
	5 : 2 = 2	**1**	
	2 : 2 = 1	**0**	
	1 : 2 = 0	**1**	

Konwersja z systemu dwójkowego na dziesiątkowy:

$(11011101)_2 = 1 * 2^7 + 1 * 2^6 + 0 * 2^5 + 1 * 2^4 + 1 * 2^3 + 1 * 2^2 + 0 * 2^1 + 1 * 2^0 =$

$= 128 + 64 + 16 + 8 + 4 + 1 = (221)_{10}$

System szesnastkowy (heksadecymalny)

Nawet niezbyt duża co do wartości liczba z systemu dziesiątkowego zamieniona na postać dwójkową (binarną) jest długim ciągiem jedynek i zer, a ponowne przeliczenie jej na wartość w systemie dziesiątkowym procesem żmudnym i długotrwałym.

Między innymi dla uproszczenia zapisu i szybkiego przeliczenia wartości wprowadzono system pozycyjny, którego podstawą jest 2^4, czyli 16 i nazwano systemem szesnastkowym (heksadecymalnym).

Cyframi tego systemu są:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F

Zależność między liczbami

Cyfry systemu szesnastkowego	Liczby systemu dziesiątkowego	Liczby systemu dwójkowego
0	0	0000
1	1	0001
2	2	0010
3	3	0011
4	4	0100
5	5	0101
6	6	0110
7	7	0111
8	8	1000
9	9	1001
A	10	1010
B	11	1011
C	12	1100
D	13	1101
E	14	1110
F	15	1111

Konwersje liczb na system binarny

Każdej cyfrze systemu szesnastkowego odpowiada cztero-pozycyjna liczba systemu dwójkowego.

Zamiana postaci liczby z systemu dwójkowego na liczbę systemu szesnastkowego polega na przypisaniu każdemu kolejnemu cztero-pozycyjnemu pakietowi układów zero-jedynkowych odpowiedniej cyfry układu szesnastkowego, np.

$$(1011|0011|1010)_2 = (B3A)_{16}$$

Jeżeli w zapisie liczby dwójkowej ostatni /pakiet/ (z lewej) ma mniej niż cztery pozycje zero-jedynkowe, to uzupełniamy brakujące pozycje zerami, np.

$$(11|1011|1110)_2 = (0011|1011|1110)_2 = (3BE)_{16}$$

Konwersje liczb na system decymalny

Przeliczenie liczby z systemu szesnastkowego na wartość liczby w systemie dziesiątkowym odbywa się według znanego wzoru , np.

$$(3BE)_{16} = 3 * 16^2 + 11 * 16^1 + 14 * 16^0 = 768 + 176 + 14 = (958)_{10}$$

Dwójkowe liczby stałoprzecinkowe

System stałopozycyjny zapisu liczb jest rozszerzeniem zapisu liczb naturalnych w stronę wartości ułamkowych.

W systemie dziesiętnym za cyfrą jednostek umieszcza się przecinek, a kolejne wagi pozycji są teraz ujemnymi potęgami podstawy:

$$253{,}763 = 2 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 3 \times 10^0 + 7 \times 10^{-1} + 6 \times 10^{-2} + 3 \times 10^{-3}$$

Zasada ta obowiązuje również w innych systemach pozycyjnych.

Dla przykładu obliczmy wartość stałopozycyjnej liczby piątkowej: $\mathbf{432{,}321_{(5)}}$

$432{,}321_{(5)} = 4 \times 5^2 + 3 \times 5^1 + 2 \times 5^0 + 3 \times 5^{-1} + 2 \times 5^{-2} + 1 \times 5^{-3}$

$432{,}321_{(5)} = 4 \times 25 + 3 \times 5 + 2 \times 1 + 3 \times {}^1/_5 + 2 \times {}^1/_{25} + 1 \times {}^1/_{125}$

$432{,}321_{(5)} = 100 + 15 + 2 + {}^3/_5 + {}^2/_{25} + {}^1/_{125}$

$432{,}321_{(5)} = 117\ {}^{86}/_{125}$

$432{,}321_{(5)} = 117{,}688$

W dowolnym systemie pozycyjnym o podstawie **p** wartość liczby stałoprzecinkowej obliczamy wg wzoru:

$$c_{n-1}\ldots c_0,c_{-1},c_{-2}\ldots c_{-m} = c_{n-1}p^{n-1} + \ldots + c_0p^0 + c_{-1}p^{-1} + c_{-2}p^{-2} + \ldots + c_{-m}p^{-m}$$

gdzie **n** - liczba cyfr przed przecinkiem, **m** - liczba cyfr po przecinku

Obliczymy wartość dwójkowej liczby stałoprzecinkowej $1101{,}1011_{(2)}$

$$1101{,}1011_{(2)} = 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 + 1 \times 2^{-1} + 0 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3} + 1 \times 2^{-4}$$

$$1101{,}1011_{(2)} = 1 \times 8 + 1 \times 4 + 0 \times 1 + 1 \times 1 + 1 \times {}^1/_2 + 0 \times {}^1/_4 + 1 \times {}^1/_8 + 1 \times {}^1/_{16}$$

$$1101{,}1011_{(2)} = 8 + 4 + 1 + {}^1/_2 + {}^1/_8 + {}^1/_{16}$$

$$1101{,}1011_{(2)} = 13 + {}^{10}/_{16}$$

$$1101{,}1011_{(2)} = \mathbf{13{,}625}$$