PODSTAWY TEORII UKŁADÓW CYFROWYCH

Operacje arytmetyczne

Opracował: Andrzej Nowak

Bibliografia: **Urządzenia techniki komputerowej,** K. Wojtuszkiewicz
http://pl.wikipedia.org/

Dodawanie dwójkowe

Tabliczka dodawania binarnego

0 + 0 = 0

0 + 1 = 1

1 + 0 = 1

1 + 1 = 0 i 1 dalej

Ostatni wynik należy rozumieć następująco: 1 + 1 daje 0 w bieżącej kolumnie i przeniesienie (ang. carry) jedynki do następnej kolumny. Przeniesienie dodawane jest do cyfry w następnej kolumnie - zupełnie tak samo postępujemy w systemie dziesiętnym, gdy wynik sumowania cyfr przekracza dziewięć.

1101	13
+ 0010	+2
1111	15

0101	5
+ 0111	+7
1100	12

1001	9
+ 0011	+3
1100	12

Jeśli liczby binarne są zapisywane ze stałym formatem (np. 8 bitów), to może się zdarzyć, iż wynik dodawania nie zmieści się w dozwolonym zakresie liczb. Sytuacja taka nazywa się nadmiarem (ang. overflow).

1010	10
+ 0110	+6
10000	16

Wynik dodawania jest liczbą 5 bitową i nie mieści się w 4 bitach. Jeśli ograniczymy go do 4 bitów, to otrzymamy wartość 0. Wystąpił nadmiar. Wynik został obcięty do reszty z dzielenia przez 16.

Zapamiętaj:
Nadmiar jest przekroczeniem górnej granicy zakresu liczb. Dla liczb naturalnych mamy do czynienia z nadmiarem, gdy pojawi się przeniesienie poza najstarszą pozycję liczby.

Dodawanie dwójkowe stałoprzecinkowe

W identyczny sposób dodajemy liczby stałoprzecinkowe. Należy tylko pamiętać o ustawieniu przecinków w jednej kolumnie i dopisaniu w razie konieczności zer na początku części całkowitych i na końcu części ułamkowych:

0011,011	3,375
+ 0111,110	+ 7,750
1011,001	**11,125**

Odejmowanie dwójkowe

Tabliczka odejmowania binarnego

0 - 0 = 0

1 - 0 = 1

1 - 1 = 0

0 - 1 = 1 i pożyczka

Ostatni zapis należy rozumieć jako: 0 - 1 daje w bieżącej kolumnie 1 i pożyczkę (ang. borrow) do następnej kolumny. Pożyczka jest odejmowana od cyfr w następnej kolumnie

1111	15
- 0111	-7
1000	8

1011	11
- 0101	-5
0110	6

1101	13
+ 0011	+3
1010	10

Przy odejmowaniu wynik może być liczbą ujemną. Ponieważ omówione systemy zapisu liczb binarnych nie uwzględniają jeszcze liczb ujemnych, to w takim przypadku wystąpi sytuacja zwana niedomiarem (ang. underflow).

0011	3
- 0100	-4
...111111	-1

Liczba -1 leży poza zakresem liczb dla kodu 4 bitowego. Dlatego nie może w tym kodzie być przedstawiona prawidłowo i otrzymujemy wynik równy 15. Wiodące jedynki powstają w tym przypadku w nieskończoność, co zostało zaznaczone trzema kropeczkami na początku wyniku odejmowania.

Zapamiętaj:
Niedomiar jest przekroczeniem dolnej granicy zakresu liczb. Dla liczb naturalnych mamy do czynienia z niedomiarem, gdy pojawi się pożyczka poza najstarszą pozycję liczby.

Mnożenie dwójkowe

Tabliczka mnożenia binarnego

0 x 0 = 0

1 x 0 = 0

0 x 1 = 0

1 x 1 = 1

Mnożenie binarne wykonujemy identycznie jak w systemie dziesiętnym - przemnażamy mnożną przez każdą cyfrę mnożnika zapisując wyniki tego mnożenia odpowiednio przesunięte. Następnie wykonujemy dodawanie zgodnie z opisanym wcześniej schematem:

0011	3
x 0101	x 5
0011	
0000	...
+ 0011	
001111	15

W systemie dwójkowym wynik mnożenia jest równy 1 tylko wtedy, gdy obie mnożone cyfry mają wartość 1.

W każdym innym przypadku otrzymujemy wartość 0. Pozwala to znacznie uprościć schemat mnożenia. Mnożną umieszczamy tylko w tych kolumnach, w których w mnożniku występują cyfry 1. Pozostałe kolumny pomijamy:

1011	11
x 1101	x 13
1011	
1011	33
+ 1011	+ 11
10001111	143

Mnożenie liczb stałopozycyjnych wykonujemy w identyczny sposób, lecz musimy pamiętać, aby przy wyniku oddzielić odpowiednią ilość cyfr ułamkowych przecinkiem - ilość ta jest sumą liczby miejsc po przecinku mnożnej i mnożnika - tak samo jak w systemie dziesiętnym.

10,1	2,5
x 11,01	x 3,25
101	125
101	50
+ 101	+ 75
1000001	8125
1000,001	**8,125**

Dilenie dwójkowe

Dzielenie binarne jest najbardziej skomplikowaną operacją arytmetyczną z dotychczas opisywanych.

Wymyślono wiele algorytmów efektywnego dzielenia, ale dla potrzeb tego opracowania wystarczy znany wam algorytm szkolny, który polega na cyklicznym odejmowaniu odpowiednio przesuniętego dzielnika od dzielnej. W systemie dwójkowym jest to szczególnie proste, ponieważ dzielnika nie musimy mnożyć.

Zadanie

Podzielimy liczbę **$1110_{(2)}$** przez **$11_{(2)}$** (**14 : 3**).

1. Przesuwamy w lewo dzielnik, aż zrówna się jego najstarszy, niezerowy bit z najstarszym, niezerowym bitem dzielnej.

   Nad dzielną rysujemy kreseczkę:

1110	- dzielna
11	- przesunięty dzielnik

2. Jeśli dzielnik da się odjąć od dzielnej bez niedomiaru, to nad kreską w kolumnie najmłodszego bitu dzielnika wpisujemy 1 i wykonujemy odejmowanie:

1	
1110	- dzielna
11	- przesunięty dzielnik
0010	- różnica dzielnej i przesuniętego dzielnika

3. Dzielnik przesuwamy o jeden bit w prawo i próbujemy tego samego z otrzymaną różnicą.

Jeśli odejmowanie jest możliwe, to nad kreską w następnej kolumnie dopisujemy 1, odejmujemy dzielnik od różnicy, przesuwamy go o 1 bit w prawo i kontynuujemy.

Jeśli odejmowanie nie jest możliwe, to dopisujemy nad kreską 0, przesuwamy dzielnik o 1 bit w prawo i kontynuujemy

100	- wynik dzielenia
1110	- dzielna
- 11	- dzielnik
0010	- dzielna po odejmowaniu przesuniętego dzielnika
- 11	- dzielnika nie można odjąć
0010	- dzielna
- 11	- dzielnika nie można odjąć, koniec
0010	- reszta z dzielenia

4. Operacje te wykonujemy dotąd, aż dzielnik osiągnie swoją pierwotną wartość.

   Pozostała dzielna jest resztą z dzielenia

   W naszym przykładzie otrzymaliśmy wynik $100_{(2)}$ i resztę $10_{(2)}$.

   Jest to wynik poprawny, gdyż 3 mieści się w 14 cztery razy i pozostaje reszta 2.

Zadanie

podzielmy liczbę $110101101_{(2)}$ przez $111_{(2)}$ (429 przez 7)

0111101	- wynik dzielenia
110101101	: 111
111	- nie da się odjąć, nad kreską 0
110101101	
111	- da się odjąć, nad kreską 1
11001101	
111	- da się odjąć, nad kreską 1
1011101	
111	- da się odjąć, nad kreską 1
100101	
111	- da się odjąć, nad kreską 1
1001	
111	- nie da się odjąć, nad kreską 0
1001	
111	- da się odjąć, nad kreską 1, koniec
10	- reszta z dzielenia

Odpowiedź:

$110101101_{(2)}$: $111_{(2)}$ = $111101_{(2)}$ - reszta $10_{(2)}$

(429 : 7 = 61 - reszta 2).